EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 7

1) le réel x est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $x^3-(4+i)x^2+(7+i)x-4=0$

$\Leftrightarrow$ $x^3-4x^2-ix^2+7x+ix-4=0$

$\Leftrightarrow \left(x^3-4x^2+7x-4\right)+i\left(x-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+7x-4=0 \\ x(1-x)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+7x-4=-4\neq 0 \\ x=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^3-4x^2+7x-4=1-4+7-4=0 \\ x=1 \end{cases}$

Donc le réel 1 est solution de l'équation (E) .

2) a) $(z-1)(z-2-2i)(\alpha z+\beta)=\left(z^2-2z-2iz-z+2+2i\right)(\alpha z+\beta)=\left[z^2+(-3-2i)z+(2+2i)\right](\alpha z+\beta)$

$=\alpha z^3+\beta z^2+\alpha(-3-2i)z^2+\beta(-3-2i)z+\alpha(2+2i)z+\beta(2+2i)$

$=\alpha z^3+\left[\beta+\alpha(-3-2i)\right]z^2+\left[\beta(-3-2i)+\alpha(2+2i)\right]z+\beta(2+2i)$

Ecrire que, pour tout nombre complexe z, $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-1)(z-2-2i)(\alpha z+\beta)$

équivaut à, pour tout nombre complexe z,

$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=\alpha z^3+\left[\beta+\alpha(-3-2i)\right]z^2+\left[\beta(-3-2i)+\alpha(2+2i)\right]z+\beta(2+2i)$

d'où $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta+\alpha(-3-2i)=-(4+i) \\ \beta(-3-2i)+\alpha(2+2i)=7+i \\ \beta(2+2i)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-4-i+3+2i=-1+i \\ \beta(-3-2i)=5-i \\ \beta(2+2i)=-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1+i \\ \beta=\dfrac{5-i}{-3-2i}=\dfrac{(5-i)(-3+2i)}{9+4}=\dfrac{-15+10i+3i+2}{13}=\dfrac{-13+13i}{13}=-1+i \\ \beta=\dfrac{-4}{2+2i}=\dfrac{-4}{2(1+i)}=\dfrac{-2(1-i)}{1+1}=-1+i \end{cases}$

Finalement, pour tout nombre complexe z, $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-1)(z-2-2i)(z-1+i)$

b) (E) équivaut à $(z-1)(z-2-2i)(z-1+i)=0$

L'équation (E) a donc trois solutions : le réel 1 et les complexes $2+2i$ et $1-i$